

Qualche nota matematica per Informatica 3*

Matteo Pradella

*Si veda Shaffer, cap. 2 e 14

SOMME

Linearità

$$\sum_{k=1}^n (ca_k + b_k) =$$

$$= c \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

Comoda ad es. per:

$$\sum_{k=1}^n \Theta(f(k)) =$$

$$= \Theta \left(\sum_{k=1}^n f(k) \right)$$

Serie aritmetica

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somma di quadrati

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somma di cubi

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Serie geometriche

Per $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Per $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Approssimazione con integrali

Se $f(k)$ una funzione monotona crescente, la sommatoria $\sum_{k=m}^n f(k)$ può essere approssimata con i seguenti integrali:

$$\int_{m-1}^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x)dx$$

Analogamente se $f(k)$ monotona decrescente, si pu' cos approssimare:

$$\int_m^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_{m-1}^n f(x)dx$$

Esempio (serie armonica)

Come limite inferiore:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Come limite superiore:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &\leq \int_1^n \frac{dx}{x} \\ &= \ln n\end{aligned}$$

per cui vale la limitazione:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \leq \ln n + 1$$

INDUZIONE

Sia $T(n)$ una affermazione da provare

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq c.$$

Induzione:

1. Caso base: $T(c)$ vale.
2. Passo induttivo: $T(n - 1) \Rightarrow T(n)$

Induzione forte: Il passo induttivo diviene

$$\begin{aligned} \forall k (c \leq k < n \Rightarrow T(k)) \\ \Rightarrow T(n) \end{aligned}$$

Esempio di induzione

Si dimostri che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Caso base: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i}{2^i} = 1/2 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

Ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

Dunque:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} + \frac{n}{2^n}$$

Per ip. ind.

$$= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

Con qualche conto...

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

QED

METODI DI SHIFTING

Sottraggono alla somma una variazione della somma stessa, per cancellare termini indesiderati e semplificare l'espressione.

esempio 1

Soluzione della somma geometrica:

$$F(n) = \sum_{i=0}^n a r^i = a + a r + a r^2 + \dots + a r^n$$

$$r F(n) = r \sum_{i=0}^n a r^i = a r + a r^2 + \dots + a r^{n+1}$$

$$F(n) - r F(n) = a + a r + a r^2 + \dots + a r^n -$$

$$-(a r + a r^2 + \dots + a r^n) - a r^{n+1}$$

ergo:

$$(1 - r)F(n) = a - a r^{n+1}$$

il risultato:

$$F(n) = \frac{a - a r^{n+1}}{1 - r}, \text{ con } r \neq 1$$

Esempio 2

Altro esempio di metodo di shifting:

$$F(n) = \sum_{i=1}^n i 2^i = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

possiamo collassare i termini moltiplicando per 2:

$$\begin{aligned} 2 F(n) &= 2 \sum_{i=1}^n i 2^i = \\ &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

dunque:

$$2 F(n) - F(n) = \sum_{i=1}^n i 2^{i+1} - \sum_{i=1}^n i 2^i$$

spostiamo il valore di i nella seconda somma, sostituendoci $i + 1$:

$$= n 2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} i 2^{i+1}$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} (i + 1) 2^{i+1}$$

eliminiamo i termini opposti:

$$= n 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$$

della sommatoria sappiamo già il valore, dunque:

$$= n 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)$$

ricapitolando:

$$F(n) = (n - 1) 2^{n+1} + 2$$

EQUAZIONI ALLE RICORRENZE

Espansione di ricorrenze

Si trovi la soluzione di:

$$T(n) = 2 T(n/2) + 5 n^2; T(1) = 7$$

Per semplicità, supponiamo che n sia una potenza di 2. Dunque possiamo riscrivere n come 2^k .

L'espansione risulta dunque la seguente:

$$\begin{aligned}T(n) &= 2 T(n/2) + 5 n^2 \\&= 2(2T(n/4) + 5(n/2)^2) + 5 n^2 \\&= 2(2(2 T(n/8) + 5 (n/4)^2) + 5(n/2)^2) + 5 n^2 \\&= 2^k T(1) + 2^{k-1} \cdot 5\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^2 + \dots \\&\quad + 2 \cdot 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 5n^2\end{aligned}$$

Questa espressione si può scrivere come:

$$\begin{aligned} &= 7n + 5 \sum_{i=0}^{k-1} n^2 / 2^i \\ &= 7n + 5n^2 \sum_{i=0}^{k-1} 1/2^i \end{aligned}$$

ma conosciamo già la sommatoria precedente, dunque:

$$= 7n + 5n^2 \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

ricapitolando e massaggiando un po':

$$T(n) = 10n^2 - 3n$$

che è la soluzione esatta per $n = 2^k$.

DIVIDE ET IMPERA

Tipico caso di equazioni alle ricorrenze che vengono da tecniche ricorsive alla *divide et impera*:

$$T(n) = a T(n/b) + c n^k; T(1) = c$$

In questo caso il problema di dimensione n è stato diviso in a sottoproblemi di dimensione n/b , mentre $c n^k$ è il lavoro necessario per combinare le soluzioni parziali.

Applichiamo l'espansione delle ricorrenze, assumendo $n = b^m$:

$$\begin{aligned} T(n) &= a (aT(n/b^2) + c(n/b)^k) + c n^k \\ &= a^m T(1) + a^{m-1} c(n/b^{m-1})^k + \dots \\ &\quad + a c(n/b)^k + c n^k \\ &= c \sum_{i=0}^m a^{m-i} b^{ik} \\ &= c a^m \sum_{i=0}^m (b^k/a)^i \end{aligned}$$

infatti $a^m = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

La sommatoria è una serie geometrica che dipende dal rapporto $r = b^k/a$. Ci sono dunque tre casi possibili:

Caso $r < 1$:

sappiamo che:

$$\sum_{i=0}^m r^i < \frac{1}{1-r}$$

che è una costante. Dunque:

$$T(n) = \Theta(a^m) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Caso $r = 1$:

Per def. di r , $a = b^k$. Dunque $k = \log_b a$.
Inoltre $m = \log_b n$. Dunque:

$$\sum_{i=0}^m 1^i = m + 1 = \log_b n + 1$$

essendo $a^m = n^{\log_b a} = n^k$, otteniamo:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \Theta(n^k \log n)$$

Caso $r > 1$:

Sappiamo che:

$$\sum_{i=0}^m r^i = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} = \Theta(r^m)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(a^m r^m) = \Theta(a^m (b^k/a)^m) \\ &= \Theta(b^{km}) = \Theta(n^k) \end{aligned}$$